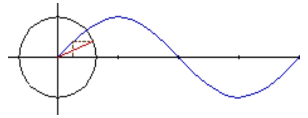
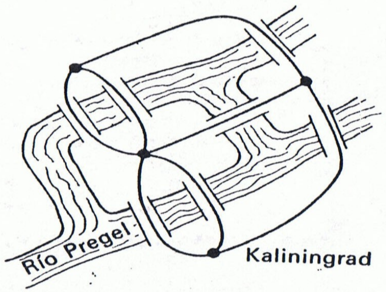


I.E.S. ARICEL.
ALBOLOTE (GRANADA).
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
Prof. Mariano Fernández Rodríguez.

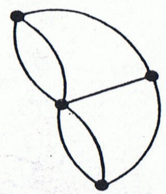
Los puentes de Kaliningrad

Se trata de uno de los problemas más famosos de todas las matemáticas. Se considera como el punto de partida de una nueva rama de las matemáticas, la llamada *topología*, la geometría de las superficies planas. El problema se planteó por primera vez en el siglo XVII, en la ciudad de Kaliningrad, al norte de la República Democrática Alemana, que se alza sobre el río Pregel, el cual, como se ve en el grabado, divide la ciudad en cuatro partes.



Durante el verano, a los habitantes de la ciudad les gustaba darse un paseo vespertino por los cuatro puentes. Descubrieron que no les era posible cruzar todos los puentes una sola vez, sin volver sobre sus pasos. Si este libro no te pertenece, copia el plano y comprueba si estás de acuerdo con sus ciudadanos.

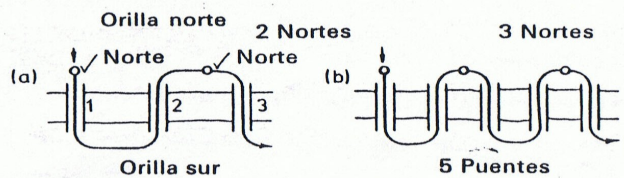
El problema llegó a oídos del gran matemático suizo Leonhard Euler, que trazó un esquema básico, como dicen los matemáticos, de las rutas que unían las cuatro partes de la ciudad. En él eliminó todos los detalles innecesarios. Sigue el recorrido de los pasos sobre el esquema. ¿Crees que los habitantes de Kaliningrad consiguieron dar el paseo que deseaban?

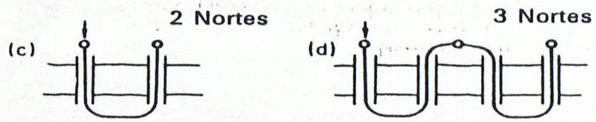


Los puentes de Euler

En realidad, Euler resolvió el problema de manera ligeramente distinta a la que exponemos aquí, que coincide con el método que suele figurar en los libros. Lo que él hizo fue simplificar la cuestión. Empezó por los sencillísimos problemas de nuestro grabado. Después, partió de las soluciones de éstos para llegar a la que nosotros dimos a «Los puentes de Kaliningrad». Los pequeños problemas se plantean así:

Un río que sigue una línea recta tiene una orilla norte y una orilla sur, con tres puentes que cruzan de una a otra. Empezando por la orilla norte y cruzando cada puente una sola vez en un único paseo sin volver sobre sus pasos, se pisará la orilla norte dos veces (véase la figura *a*). Con cinco puentes (figura *b*), se pisará la orilla norte tres veces. ¿Has deducido ya la fórmula para un número impar de puentes?





Observa ahora la figura *c*. Con dos puentes, se pisará la orilla norte dos veces y, con cuatro puentes, como se ve en la figura *d*, se pisará tres veces. ¿Puedes encontrar la fórmula para cualquier número par de puentes?

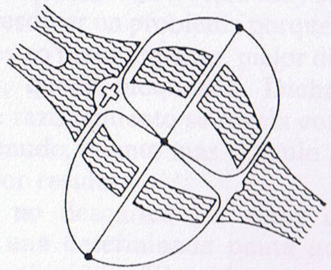
No, es imposible cruzar todos los puentes y hacerlo sólo una vez en el mismo paseo. Cuando se habla de dibujo, a un tal recorrido se le llama *de un solo trazo*. Euler descubrió que existía una regla para saber si un itinerario es o no de un solo trazo. Haz primero el *diseño*, como hizo Euler con respecto a Kaliningrad. Esto eliminará todos los detalles inútiles para el planteamiento del problema. Luego cuenta el número de caminos (líneas) por los que se llega a cada punto. Llama a esos puntos *impares* si hay un número impar de líneas que conducen a ellos, y *pares* si dicho número es par. Euler descubrió la regla siguiente: un diseño con todos los puntos pares, o con dos puntos impares únicamente, es de un solo trazo, se puede dibujar en un solo movimiento sin levantar el lápiz del papel o sin pasar dos veces por la misma línea. Los diseños con otros números de puntos impares *no son* en absoluto de un solo trazo. Si quieres enseñar a alguien cómo se traza un esquema con dos puntos impares, asegúrate de empezar siempre en uno de esos puntos.

Regla del número impar de puentes: el número de veces que se pisa la orilla norte (llamémosla N) es igual a la mitad de 1 más el número de puentes (p). O sea, $N = (p + 1)/2$.

Regla del número par de puentes: en este caso, el número de «nortes» es igual a 1 más la mitad del número de puentes. O sea, $N = (1 + p)/2$.

Nota matemática: para llegar a estas fórmulas, tienes que conjeturar e incluso hacer algunos malabarismos. Sin embargo, advierte que, en la fórmula «impar», se divide $(p + 1)$ por la mitad, mientras que en la fórmula «par» sólo se divide p, lo cual, obviamente, no entra en lo posible cuando p no es un número par.

Sí, es posible dar ese paseo. El esquema muestra que hay dos puntos impares, luego se ajusta a la regla de Euler. Véanse «Los puentes de Kaliningrad».



Los puentes de París

En el año 1618, el plano de París, con sus puentes sobre el río Sena, se ajustaba al diseño que incluimos aquí. La famosa catedral de Notre Dame, que se alza sobre la isla, aparece señalada con una cruz. ¿Podían los parisienses de la época dar un paseo por los puentes cruzándolos todos una sola vez sin volver sobre sus pasos? Traza un esquema semejante al de «Los puentes de Kaliningrad».